



Materiálové charakteristiky – moduly pružnosti **E, G, K** a μ .

Použití – velké elastické deformace – pružiny, podložky

- nežádoucí průhyby – tuhost systému
- kmitání soustavy – vlastní frekvence systému závisí na modulu pružnosti

1. Modul pružnosti

- a) elastické konstanty materiálu
- b) měření modulu pružnosti
- c) hodnoty modulu E konstrukčních materiálů

2. Vazby mezi atomy

- a) typy vazeb
- b) proč některé vazby jsou tuhé a jiné měkké?

3. Uspořádání atomů v pevných látkách

- a) krystalická stavba
- b) uspořádání atomů v kovech, keramice, skle a polymerech

4. Fyzikální základ modulu E

- a) vztah mezi modulem E a pevností vazby (uspořádáním atomů)
- b) teplota skelného přechodu polymerů
- c) modul pružnosti kompozitů

5. Příklady navrhování konstrukce s uvážením elastických deformací

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11}S_{12}S_{13}S_{14}S_{15}S_{16} \\ S_{21}S_{22}S_{23}S_{24}S_{25}S_{26} \\ S_{31}S_{32}S_{33}S_{34}S_{35}S_{36} \\ S_{41}S_{42}S_{43}S_{44}S_{45}S_{46} \\ S_{51}S_{52}S_{53}S_{54}S_{55}S_{56} \\ S_{61}S_{62}S_{63}S_{64}S_{65}S_{66} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{anisotropní materiál}$$

Isotropní materiál

Polykrystalické materiály (kov, keramika, sklo)

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

pouze dvě nezávislé konstanty

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Orthotropní materiál

Monokrystaly,

kompozit (matrice+vlákno)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{E_x}, -\frac{\mu_{yx}}{E_y}, 0 \\ -\frac{\mu_{xy}}{E_x}, \frac{1}{E_y}, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{G_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{E}, -\frac{\mu}{E}, -\frac{\mu}{E}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu}{E}, \frac{1}{E}, -\frac{\mu}{E}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu}{E}, -\frac{\mu}{E}, \frac{1}{E}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{G}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{E_x}, -\frac{\mu_{yx}}{E_y}, -\frac{\mu_{zx}}{E_z}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu_{xy}}{E_x}, \frac{1}{E_y}, -\frac{\mu_{zy}}{E_z}, 0, 0, 0 \\ -\frac{\mu_{xz}}{E_x}, -\frac{\mu_{yz}}{E_y}, \frac{1}{E_z}, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{G_{yz}}, 0, 0 \\ 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G_{zx}}, 0 \\ 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{G_{xy}} \end{Bmatrix}$$



1a) elastické charakteristiky

μ - Poissonův poměr – součinitel příčné kontrakce $\mu = \left| \frac{\Delta d / d_0}{\Delta L / L_0} \right| = - \frac{\Delta d / d_0}{\Delta L / L_0} = - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$

Vztah mezi deformací v příčném a podélném směru $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = -\mu\varepsilon_1$

☺ Jaké číselné hodnoty součinitel příčné kontrakce nabývá ?

Další charakteristiky jsou E, G, K

Vztahy mezi charakteristikami $E = 2G(1+\mu)$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$, $\mu = \frac{E}{2G} - 1$

Pro kovy bylo experimentálně zjištěno, $E \approx K$

☺ dokaž, že pak $\mu = 0,33$ a $G = \frac{3}{8} E$

1b) Metody měření elastických konstant jsou

✓ statické (pomalé zatěžování, univerzální zkušební stroj)

statické

nízkofrekvenční

dynamické

vysokofrekvenční

μ - měření z definice pomocí tenzometrů (firma Hottinger)

E i) oblast elastických deformací při zkoušce tahem

☺ minimální $L_0 = 20$ mm, vypočítejme jaké zvětšení potřebujeme při analogovém snímání

deformace, jakou citlivost potřebujeme pro digitální záznam

kovy - není součástí ČSN EN 10 002 – zkouška tahem, evropská norma zatím není

plasty ČSN EN ISO 527-1 zde je určení E –metoda sečny (deformace 0,0005, 0,0025), metoda nejmenších čtverců

ii) oblast elastických deformací při ohybové zkoušce

zkouška třibodovým ohybem $E = \frac{F}{y} \frac{l^3}{48.J_0}$, zkouška čtyřbodovým ohybem $E = \frac{F}{y} \frac{l_0^2.l_1}{16.J_0}$,

kde J_0 je kvadratický moment průřezu, průřez



$$J_0 = \frac{\pi.d^4}{64}$$



$$J_0 = \frac{b.h^3}{12}$$

používá se např. k měření modulu pružnosti konstrukční keramiky ČSN EN 843, ale může se použít i v případě plastů a kovů. Ve srovnání s tahovou zkouškou má tyto nevýhody:

- platnost vztahů je omezena (vzdálenost opor nesmí být příliš malá, l příp $l_0 \geq 4.h$)
- zjištěný modul E je střední hodnotou mezi modulem v tlaku a tahu
- riziko, že vyhodnocujeme nejen průhyb zkušebního tělesa, ale i zamačkávání opor

G – modul pružnosti ve smyku $G = \frac{M_t}{\varphi} \frac{32.l}{\pi.d^4}$

✓ Dynamické metody

a) nízkofrekvenční, - torzní kyvadlo (v současné době je norma pro plasty) , vlastní

frekvence , pro kruhový průřez zkušebního tělesa d o délce l $G = \frac{128.\pi.l.J_a.f^2}{d^4}$

b) vysokofrekvenční (oblast akustických frekvencí nebo metody měření rychlosti zvuku

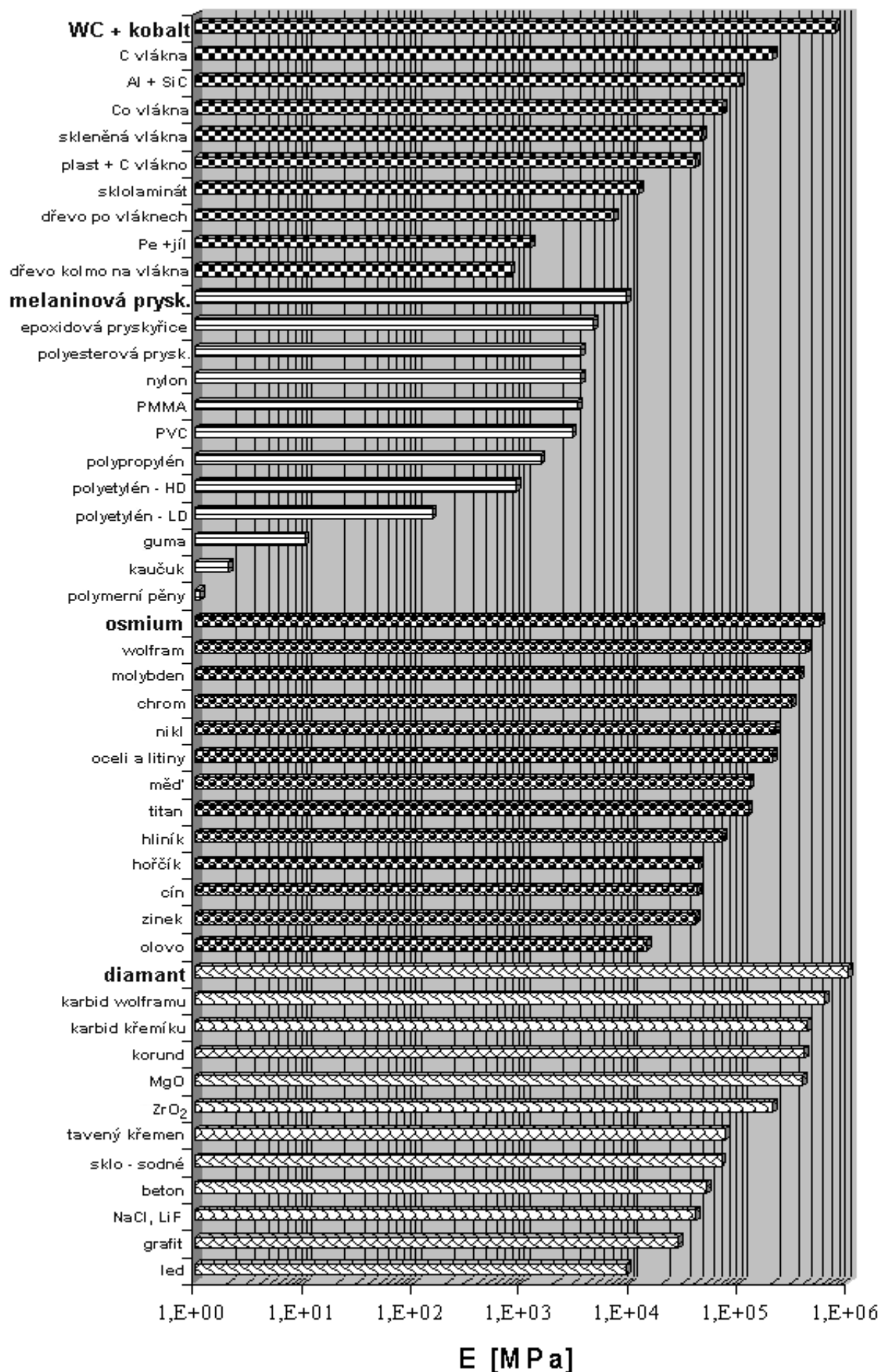
v materiálu $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$,

Závěr

Při srovnání hodnot E určených při pomalém a dynamickém zatěžování zjistíme, že je zde i u kovů (u plastů je to pravidlem jak si ukážeme dále) rozdíl. Někdy se u kovů hovoří o E_{iz} (modul pružnosti určený za izotermických podmínek, tedy při pomalé rychlosti) E_{ad} (modul pružnosti určený za adiabatických podmínek tedy při vysoké

rychlosti, frekvenci zatěžování) $E_{ad} > E_{iz}$, $\frac{1}{E_{ad}} = \frac{1}{E_{iz}} - \frac{\alpha^2 T}{\rho.c_p}$, kde α je teplotní součinitel délkové

roztlačnosti, T absolutní teplota, ρ hustota a c_p specifické teplo při konstantním tlaku



PRUŽNOST

6ms / Vlach

4 / 7



Příčina rozdílů v modulech pružnosti je ve

- ve vazbách mezi atomy
- v uspořádání atomů v prostoru

Vazby jsou

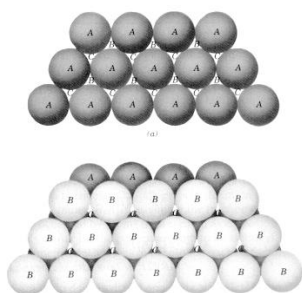
- a) primární (teplota tání 1 000 až 5 000 K) – kovová, iontová a kovalentní
- c) sekundární (teplota tání 100 až 500 K) – Van der Waalsova vazba (N_2), vodíkový můstek

Díky vazbám vzniká kondenzovaný stav látek z plynné fáze – kapaliny a pevné látky. Rozlišujeme pět různých kondenzovaných stavů podle toho, zda je vazba rozrušená nebo pevná.

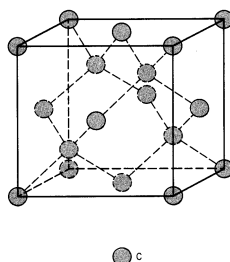
STAV	VAZBY		MODUL	
	Rozrušené	Pevné	K	E (G)
Kapalina	*		Velký	Nula
Kapalné krystaly	*		Velký	Malá nenulová hodnota
Guma	*(sekundární)	*(primární)	Velký	Malý ($E \ll K$)
Skla		*	Velký	Velký ($E \approx K$)
Krystaly		*	Velký	Velký ($E \approx K$)

3) Uspořádání atomů v pevných látkách

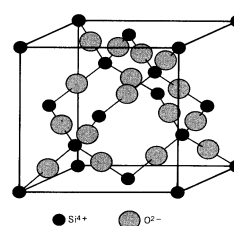
Kovová vazba – dominantní u kovů – kovové ionty v oceánu elektronů – žádné nároky na směrovost vazby a tedy vznikají mřížky, které mají těsné uspořádání v prostoru – kovy mají ze všech materiálů největší hustotu – na obr.1 je znázorněno těsné uspořádání kuliček v rovině, další vrstvy můžeme klást buďto ABABAB, pak vzniká mřížka hexagonální (šesterečná) s těsným uspořádáním **hcp** – zinek, hořčík, titan, osmium, nebo ABCABC a pak vzniká mřížka kubická plošně centrovaná **fcc** – hliník, měď, austenit, zlato, stříbro, platina, nikl. Jako třetí mřížka se u kovů vyskytuje kubická prostorově centrovaná **bcc** – α -železo – v tomto případě je těsné uspořádání pouze ve směru tělesové úhlopříčky. Která mřížka vznikne závisí na řadě okolností (souvisí to s energií), např. i na teplotě a proto existuje polymorfie cín (při -18°C kov se mění na prášek) – Scott na jižním pólu, Napoleonovi vojáci v Rusku, modifikace kobaltu $+20^\circ\text{C}$ hcp/od 450°C fcc, železo bcc do 910°C /fcc do 1390°C /bcc



Obr.1



Obr.2

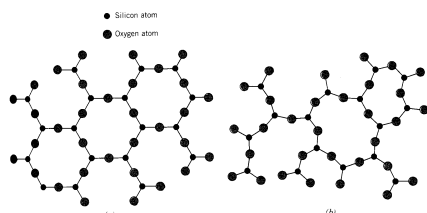


Obr.3

Iontová vazba je dominantní u iontové keramiky. Touto vazbou se nemohou tvořit krystaly čistých látek. V kubické plošně centrované mřížce fcc (stejně je tomu i u hcp mřížky) jsou dva druhy mezer – oktaedrické – střed krychle příp stran Na^+Cl^- , MgO (u hcp je Al_2O_3) – tetraedrické polohy UO_2 , ZrO_2 (velice zajímavá keramika, polymorfni chování s poklesem teploty se mění mřížka kubická, tetragonální a monoklinická)

Kovalentní vazba je nejpevnější, ale má značné nároky na postavení sousedů, proto krystaly tvořené touto vazbou mají menší hustotu než např. kovy. Mřížky jsou komplikované. V čisté podobě je kovalentní vazba v případě diamantu (obr. 2) – diamantová mřížka (fcc + 2+2 tetraedrické mezery). Nahrazením uhlíku v tetraedrických polohách křemíkem vznikne SiC , další kubickou mřížkou (obr.3) je SiO_2 krystal křemene.

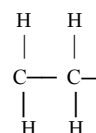
↓ Obr. 4



✓ elastoméry (pryže, gumy) – velice pružné.

Základem polymerů jsou dlouhé řetězce tvořené kovalentní vazbou. Etylén

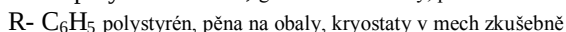
monomer



Nerosty a skla obsahují také kovalentní vazby. Anorganická skla – silikáty – viz obr.4. (a) krystal, (b) sklo. Řetězce SiO_2 – narušením řetězců ionty Na , Ca vznikají skla sodná, vápenná s nižší teplotou tání. Poměrně velká skupina materiálů, kde se vyskytuje kovalentní vazba jsou **plasty**. Z Nauky víme, že plasty podle jejich vlastností dělíme na

- ✓ termoplasty (polyetylén) – měkne při ohřevu
- ✓ termosety (pryskyřice) – smícháním dvou složek

Molekulová váha = váha monomeru x jejich počet, stupeň polymerizace, komerční polymery mají řetězce tvořené z 10^3 až 10^5 monomerů

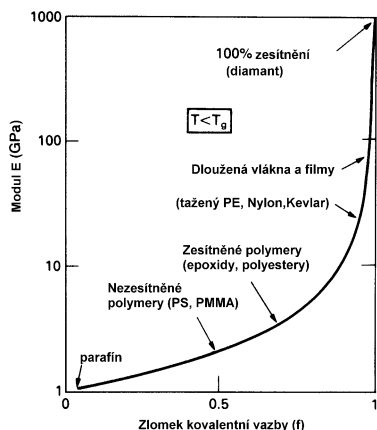

$$\sigma = \left(\frac{S_0}{r_0} \right) \cdot \varepsilon \Rightarrow E = \left(\frac{S_0}{r_0} \right)$$

Z porovnání teoretických hodnot s hodnotami v tabulce na straně 3 vidíme, že u kovů a keramiky je teoretická předpověď správná. Neshoda je pouze u polymerů. Tajemství je v teplotě skelného přechodu.





Ad I. – skelná oblast, leží pod teplotou T_g , oba typy vazeb jsou aktivní (obr8). Zatížení napíná vazby – způsobuje elastickou deformaci, která je vratná. 2 typy vazeb – modul E polymeru je dán střední tuhostí těchto vazeb, E odhadujeme ze součtu deformací každého z typů vazby

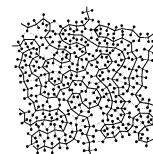


$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{kovalentní vazby}} + \varepsilon_{\text{sekundární vazby}} = f \frac{\sigma}{E_1} + (1-f) \frac{\sigma}{E_2}, \text{ kde } f \text{ je}$$

objemový podíl (zlomek) kovalentních vazeb a $(1-f)$ objemový podíl sekundárních vazeb, E_1 modul kovalentní vazby, E_2 modul sekundární vazby (viz. obr. 9).

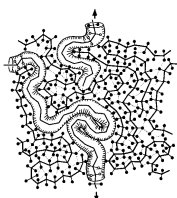
V oblasti skelného plátó modul E prakticky nezávisí na teplotě. Za velmi nízkých teplot (daleko od T_g) tak tomu je. V blízkosti teploty T_g může dojít k tomu, že některé segmenty (pomocí tepelné aktivace) změní svoji polohu – sekundární relaxace.

Obr.9



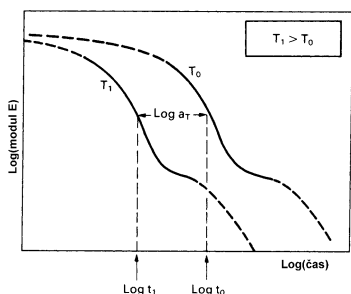
Obr.8

Ad II. – skelný přechod



Obr. 10

Jak roste teplota, sekundární vazby začínají tát a některé segmenty molekul mohou po sobě klouzat jako mastné nitě (špagety) – obr.10. Když je polymer zatížen, pak část molekul po sobě klouže a tedy se přeskupuje hmota v prostoru (přeskupování závisí na čase) a tedy vzniká jednak pružná deformace a jednak tato deformace časově závislá. Růst teploty přes T_g – polymer nabývá na objemu – je víc místa na klouzání molekul. Stále však zůstávají oblasti, kde ještě nedošlo k rozvolnění sekundárních vazeb – je zde pouze elastická deformace. Při odlehčení tyto elasticky zdeformované oblasti tlačí polymer do původního tvaru – dochází k obrácenému klouzání (tečení) molekul. Říkáme, že polymer je ve viskoelastickém stavu. V oblasti viskoelastického přechodu je modul E výrazně závislý na teplotě a také na rychlosti zatěžování. Viskoelastické chování je možné přirovnat ke creepovému chování kovů. Proto v této oblasti teplot lze hovořit jak z hlediska hodnot deformace, tak i hodnot modulu E o ekvivalenci teploty a rychlosti zatěžování. Z nauky víme, že rychlost stacionárního creepu závisí na teplotě $\dot{\varepsilon}_{ss} = \frac{\varepsilon}{t} = A \exp(-\frac{Q}{RT})$, $\varepsilon(T, t) = t \cdot A \cdot \exp(-\frac{Q}{RT})$.



Z Hookova zákona

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon(t, T)} = \frac{\sigma}{t \cdot A \exp(-\frac{Q}{RT})} = \frac{B}{t} \exp(\frac{Q}{RT})$$

To znamená, že hodnota E je jednoznačnou funkcí výrazu

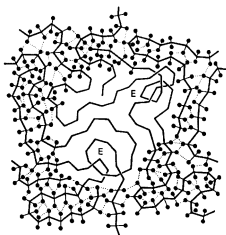
$$\frac{B}{t} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right)$$

Obr. 11

Stejně hodnoty E dostaneme, když mezi teplotou zkoušky T a dobou

zatěžování t bude platit $\frac{B}{t_1} \exp(\frac{Q}{RT_1}) = \frac{B}{t_0} \exp(\frac{Q}{RT_0}) \Rightarrow \ln a_t = \ln(\frac{t_0}{t_1}) = -\frac{Q}{R} \left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right]$ viz. obr. 11

Ad III. – kaučukovitě plátó



Obr. 12

Vzroste-li teplota nad T_g , pak se z polymeru stává lepkavá kapalina (krátké řetězce $<10^3$) nebo přechází do tzv. kaučukovitěho stavu (řetězce $>10^4$). Příčina kaučukovitě elasticity se mnohem obtížněji vysvětluje než elasticita krystalů. Dlouhé molekuly jsou vzájemně propletené a tedy jsou ve struktuře místa, kde dojde k zasukování mezi molekulami – místa na obr.12 ozn. **E**. Zasukovaná místa dávají materiálu *tvarovou paměť* – při zatěžování se molekuly mezi spletníci natahují a při odlehčení se vracejí do původní polohy. Modul E je v kaučukovitěm stavu asi $0,001 \cdot E$ v oblasti skelného plátó a nezávisí na teplotě.

Technicky je kaučukovitě stav zajímavý v případě, že zasukovaná místa **E** jsou nahrazena spojkami mezi molekulami (zesítněním) – kovalentní vazby. Počet spojek musí být malý – jedna spojka na několik set molekulárních jednotek. Protože se jedná o pevné spojky – kovalentní vazby- které se nerozpadnou nad T_g – vzniká elastomer - guma – který se může natahovat až o 300% a pak se vrátit do

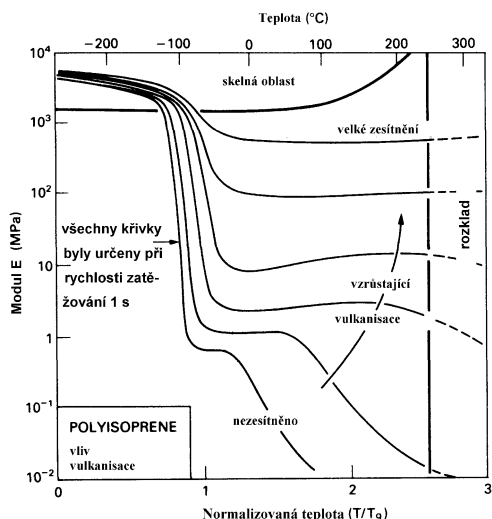


původního tvaru ($\mu \neq 0,3$, $\mu = 0,5$). Přílišné zesítnění ničí tyto gumové vlastnosti vzniká termoset např. epoxidová pryskyřice.

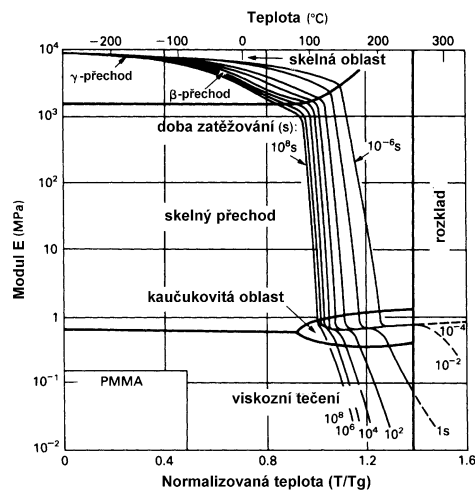
Ad IV.- viskózní tečení

V oblasti teplot $T > 1,4 \cdot T_g$ jsou sekundární vazby zcela rozrušeny a místa propletení se také rozpadla. Termoplast je roztavený a je tedy viskózní kapalinou. Tato vlastnost je důležitá z hlediska technologického – vyfukování, vstřikování – umožňuje viskozita 10^4 až 10^6 P. Roztavené kovy mají viskozitu 10^{-3} P.

Příklady teplotní závislosti E konkrétních polymerů.



Obr. 13– vliv vulkanizace – zesítnění



Obr. 14 – plexisklo – vliv rychlosti zatěžování

Ad 4 c) Modul pružnosti kompozitů

Vytváření kompozitu – materiálu, který má lepší vlastnosti než materiály ze kterých je složen.

Skleněné vlákno – epoxid (glass fibre reinforced polymers GFRP)

Uhlíkové vlákno CFRP

Bórové vlákno BFRP

Plněné polymery skleněným prachem, sazemí, živici a pod.

Jiné kombinace kov + kov (Al + ocelová vlákna), keramika+kov (hořčíková slitina + Al_2O_3 vlákna, WC + Co na lisovnice pro výrobu diamantů)

Odhadněme modul pružnosti pro kompozit s dlouhými vlákny (orthotropní vlastnosti)

Případ 1 napětí působí rovnoběžně s vlákny – deformace vláken f i matrice m je stejná

$$\sigma = V_f \cdot \sigma_f + (1 - V_f) \cdot \sigma_m$$

$$\sigma = E_{komp} \cdot \varepsilon = V_f \cdot E_f \cdot \varepsilon + (1 - V_f) \cdot E_m \cdot \varepsilon$$

$$E_{komp} = V_f \cdot E_f + (1 - V_f) \cdot E_m$$

Případ 2 napětí působí kolmo na vlákna, vlákna i matrice přenáší stejné napětí

$$\varepsilon = V_f \cdot \varepsilon_f + (1 - V_f) \cdot \varepsilon_m$$

$$\frac{\sigma}{E_{komp}} = V_f \cdot \frac{\sigma}{E_f} + (1 - V_f) \cdot \frac{\sigma}{E_m}$$

$$E_{komp} = \left\{ \frac{V_f}{E_f} + \frac{(1 - V_f)}{E_m} \right\}^{-1}$$

podobný výraz dostaneme i pro kompozit plněný

částicemi

☺ namalujte závislost $E_{kompozitu}$ na V_f pro oba případy.