

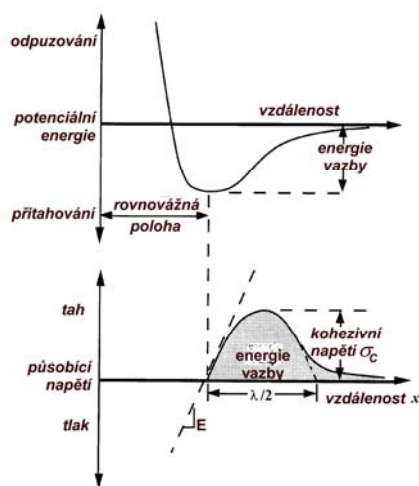


Při řešení problému, jak zabránit křehkému lomu součásti, příp. konstrukce, můžeme použít

- konceptu tranzitních teplot (platí pouze u ocelí a vychází z toho, že provozní teplota zařízení je vyšší než tranzitní teplota. O tranzitních teplotách i metodách jejich měření jsme hovořili na předcházejících přednáškách.
- konceptu zabránění iniciaci lomu (platí obecně a vychází z mechaniky lomu. Je zde zavedena materiálová charakteristika – lomová houževnatost, pomocí které je možné počítat únosnost součásti s trhlinou)

Lomová mechanika – nejstarší obor, který tvoří základ všech pozdějších teorií, je **Lineární elastická lomová mechanika**, která zavedla materiálové charakteristiky K_{IC} , G_{IC} , jež kvantifikují houževnatost materiálu (v některých učebnicích se vymýšlí pro tyto veličiny jiná písmenka, protože tato jsou již obsazena objemovým modulem a modulem ve smyku; my si budeme pamatovat, že tyto dva symboly vyjadřují lomovou houževnatost materiálu a zvolená písmenka jsou zde proto, že vyjadřují úctu k lidem, kteří byli průkopníky v tomto oboru; **G** je podle pana Griffitha, který se jako první zabýval problémem iniciace trhliny ve skle a je považován za dědečka lomové mechaniky, **K** je podle jména Kinz, tak se jmenoval blízký spolupracovník Irwina, který je otcem lomové mechaniky). Lineární říkáme proto, že mezi napětím a deformací předpokládáme lineární závislost. Poněkud novější je **Elasticko plastická lomová mechanika**, která zavádí materiálové charakteristiky δ_c a J_{IC} .

1.1 Pohled na lom z atomárního hlediska



Obr.1

Na obr.1 je ukázáno odvození kohezivní pevnosti materiálu na základě představy materiálové charakteristiky γ_s .

$$\sigma = \sigma_c \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow \text{pro malé posuvy } \sin(x) = x \Rightarrow$$

$$\sigma = \sigma_c \left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \text{ platí Hookův zákon a proto } \sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot x}{a_0} \Rightarrow$$

$$\sigma_c = \frac{\lambda \cdot E}{2 \cdot \pi \cdot a_0} \quad \text{rov. (1)}$$

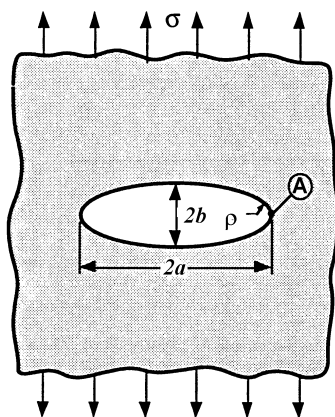
γ_s je práce vykonaná meziatomovými silami při vzniku nového, jednotkového povrchu. Protože při porušení vazeb se vytvoří dva nové povrchy, platí

$$2 \cdot \gamma_s = \int_0^{\lambda/2} \sigma_c \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = \frac{\lambda \cdot \sigma_c}{\pi} \quad \text{rov. (2)}$$

kombinací (1) a (2) dostaneme
$$\sigma_c = \left(\frac{E \cdot \gamma_s}{a_0}\right)^{1/2} \quad \text{rov. (3)}$$

1.2 Vada (defekt) – koncentrátor napětí

U materiálů, kde nejsou pohyblivé dislokace je možné docílit hodnot pevnosti - vlákna, struny, whiskery – srovnatelné s teoretickou (kohezivní) pevností. To však neplatí obecně. Větší tělesa z keramiky a někdy i z kovů mohou mít pevnost o několik řádů nižší. Vysvětlení je podobné jako v případě vysvětlování plastické deformace.



pohyb dislokací – lokální pohyb atomů $\Leftrightarrow$ globální – makroplastická deformace

lokální koncentrace napětí u defektů $\Leftrightarrow$ globální – celková pevnost součásti

První kvantitativní důkaz o koncentraci napětí u defektu podal v roce 1913 Inglis.

$\Leftarrow$ Obr. 2 Analýza eliptického defektu délka $2a$, výška $2b$. Napětí na vrcholu elipsy (bod A) $\sigma_A = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b}\right)$, poměr $\frac{\sigma_A}{\sigma} = k_f = \alpha$

tvarový součinitel koncentrace napětí, $a = b$, pak k_f známe pro kruhový otvor ze skript. V případě, že velká poloosa a je mnohem

větší než b , pak elipsa přejde v ostrou trhlinu. Řekněme si, že poloměr $\rho = \frac{b^2}{a}$, pak $\sigma_A = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)$ a když

$a \gg \rho$, pak jedničku zanedbáme a dostaneme



$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (\text{rov.4.})$$

Podle rov.4 napětí v bodě A (na čele defektu) v případě nekonečně ostré trhliny ($\rho = 0$) je nekonečně velké. Toto způsobilo v té době jisté překvapení – vždyť materiál není schopen snášet nekonečně velké napětí – existuje jistá kohezivní pevnost.

Jinak řečeno podle této teorie by se měla součást obsahující ostré trhliny porušit již při velice malém zatížení – vlastní tíhou. Právě tento paradox motivoval leteckého konstruktéra pana Griffithe k vytvoření teorie lomu založené na energetické rozvaze.

Diskuse modelu lokální koncentrace napětí na základě pozdějších představ

Nekonečně ostrá trhlina je matematickou abstrakcí, která neodpovídá skutečnému materiálu. Materiál je tvořen atomy. U kovů víme, že se mohou díky pohyblivým dislokacím plasticky deformovat. To znamená, že původně ostrý defekt se zaoblí. U materiálů, kde nemůže dojít k plastické deformaci bude minimální rádius kořene trhliny roven mřížkovému parametru. Dosadíme-li za $\rho = a_0$ do rovnice (1) dostaneme odhad lokální koncentrace napětí

$$\text{na špičce atomárně ostré trhliny } \sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{a_0}} \quad \text{rov. (5)}$$

Předpokládejme, že k lomu dojde při dosažení kohezivní pevnosti tzn. $\sigma_A = \sigma_C$ pak do rov.(5) dosadíme rov.(3)

$$\text{a dostaneme } \sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{a_0}} = \sigma_C = \sqrt{\frac{E \cdot \gamma_s}{4 \cdot a_0}} \gg \gg \text{ působí-li ve stěně zatížením } \sigma, \text{ pak toto napětí v okamžiku}$$

$$\text{lomu je dáno vztahem } \sigma_f = \left(\frac{E \cdot \gamma_s}{a} \right)^{1/2}, \quad \text{rov. (6)}$$

Kde E, γ_s jsou materiálové charakteristiky, a je velikost trhliny

1.3 Griffithův model založený na energetické bilanci

Podle prvního zákona termodynamiky – zákona zachování energie – víme, že soustava přechází z jednoho stavu do druhého pouze tehdy, když celková energie soustavy klesá.

Pohádka o pouťovém balónku, která je ve skriptech z Nauky – to je v podstatě princip všech velkých havárií lodí, mostů a pod.

Ponaučení z této pohádky je – při havárii křehkým lomem je práce spojená se vznikem lomu vykonána elastickou energií akumulovanou (nahromaděnou) v konstrukci [učení ústy fyzika: trhlina může vyniknout (nebo existující trhlina bude růst) pouze tehdy, jestliže tento proces způsobí, že celková energie systému zůstane konstantní, nebo se zmenší].

Kritické podmínky pro vznik lomu můžeme definovat jako okamžik počátku růstu trhliny za rovnovážných podmínek $\Rightarrow$ energie systému se nemění.

Uvažujme nekonečnou stěnu zatíženou konstantním napětím (pod pojmem nekonečná stěna rozumíme, že šířka i výška stěny jsou mnohem větší než $2a$). Předpokládejme, že práce spojená s přírůstkem lomové plochy dA bude

uhrazena elastickou energií uvolněnou v okolí rostoucí trhliny, pak Griffithova energetická bilance je dána vztahem:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dW_{el}}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0,$$

kde W je celková energie systému, W_{el} – elastická energie akumulovaná v systému, W_s – práce spojená s vytvořením nových povrchů (písmenko s = surface = povrch), $A = 2Ba$ je velikost lomové plochy $2a$ délka trhliny a B tloušťka tělesa.

V případě, že práce spojená se vznikem trhliny je vykonána elastickou energií kumulovanou v systému, pak

$$-\frac{dW_{el}}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad \text{rov. (7)}$$

počítáme z

$\Leftarrow$ obr. 3 $W_{el} = W_{el0} - (\text{odlehčený objem} = 2a \cdot a \cdot \pi \cdot B) \cdot (\text{elastická energie v jednotce}$

objemu $= \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$) $= W_{el0} - \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2 \cdot B}{E}$; $W_s = 4 \cdot a \cdot B \cdot \gamma_s$ ($a \cdot b \cdot 2 \gamma_s$ krát dvě), dosadíme do rov. (7) a dostáváme

$$\sigma_f = \left(\frac{2 \cdot E \cdot \gamma_s}{\pi \cdot a} \right)^{1/2} \quad \text{rov. (8).}$$

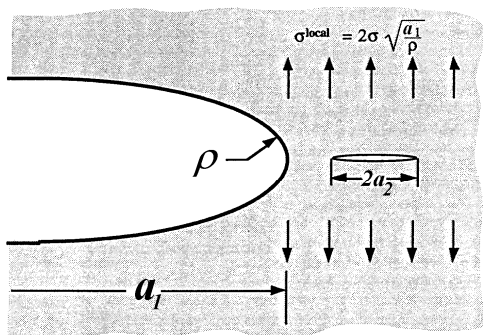


Srovnání Griffithova modelu s modelem lokální koncentrace napětí.

Griffithův model je založen na bilanci celkové energie – lom nastane v okamžiku, kdy uložená energie je dostatečná k překonání povrchové energie materiálu. Potom dojde k porušení vazeb, napětí na atomární úrovni musí být větší než je kohezivní pevnost, což je v podstatě lokální intenzifikace napětí způsobená defekty. Podobnost mezi rov. (6) a (8) je zřejmá. Předpovědi globálního (nominálního) lomového napětí se liší asi o 40%. Lze tedy říci, že tyto dva případy jsou shodné v případě ostré trhliny v křehkém tělese. Zdánlivý nesoulad se objevuje, když poloměr kořene trhliny je významně větší než atomová vzdálenost (parametr mřížky). Změna akumulované elastické energie ve vztahu k energii nutné pro vznik trhliny je necitlivá na rádius vrubu pokud $a \gg \rho$ (obr. 2); takže Griffithův model říká, že lomové napětí není citlivé na ρ . Podle Inglisovy analýzy musí být v kořeni trhliny dosaženo kohezivní pevnosti σ_c , pak napětí σ_f se bude měnit s $1/\sqrt{\rho}$.

Uvažujme trhlínu s $\rho = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ (5 μm). Takováto trhlína se bude jevit jako ostrá ve světelném mikroskopu, ale ρ je o čtyři řády větší než atomová vzdálenost v krystalech ($\approx 1 \text{ \AA}$). V tomto případě přístup lokální koncentrace napětí předpovídá nominální (globální) lomové napětí 100 krát větší než Griffithova rovnice. Skutečné chování materiálu je někde mezi těmito dvěma extrémy $\Rightarrow$ lomové napětí závisí na rádiu vrubu, ale ne tak významně jak plyne z Inglisovy analýzy.

Vysvětlení nesouladu.

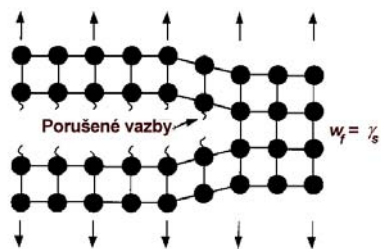


Zdánlivý nesoulad mezi modelem lokální koncentrace napětí σ a energetickým kriteriem založeným na termodynamické úvaze může být řešen z hlediska lomu jako procesu nukleace a růstu. V případě, že nominální napětí i velikost trhliny splňují Griffithovo energetické kritérium, to jest existuje dostatečná termodynamická hnací síla k růstu trhliny, ale lom musí být nejdřív nukleován. Jde o podobný případ jak známe z fyziky – voda tuhne v led při 0°C , ale v případě potlačení nukleace můžeme podchladit vodu o více než 10°C .

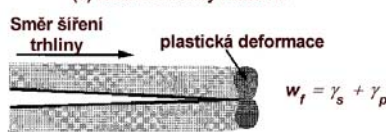
⇐ Obr. 4

K nukleaci lomu dochází různými způsoby. Jeden z příkladů ilustruje obr. 4. Makroskopická trhlína zvětšuje napětí v okolí mikrotrhliny, která se začne šířit, když je splněna Griffithova

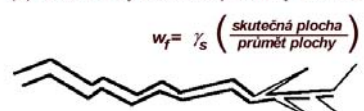
rovnice. Mikrotrhlína se spojí s velkým defektem, který se šíří, jestliže je splněno globálně Griffithovo kritérium (toto se děje při šíření štěpné trhliny ve feritu).



(a) Ideálně křehký materiál



(b) Kvazikřehký elasticko-plastický materiál



(c) větvení trhliny

Modifikovaná Griffithova rovnice.

Rovnice (8) platí pouze pro ideálně křehké těleso. Griffith získal dobrou shodu s experimentálně zjištěnou pevností. V případě kovů je však pevnost tělesa s trhlínou i v případě křehkých (bezdeformačních) lomů mnohem vyšší než předpovídá Griffithova teorie. Irwin a Orowan nezávisle na sobě modifikovali Griffithův výraz pro materiály, které jsou schopné plastické deformace. Modifikovaný výraz má tvar

$$\sigma_f = \left(\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2}, \quad \text{rov. (8a)}$$

kde γ_p je plastická práce nutná k vytvoření lomové plochy a platí $\gamma_p \gg \gamma_s$. V ideálně křehkém tělese trhlína může vznikat pouze porušováním atomových vazeb. Zavedeme označení $w_f = \gamma_s$ v tomto případě energie porušených vazeb na jednotku plochy.

⇐ Obr. 5

Když se šíří trhlína materiálem jako je kov, pak dochází k pohybu dislokací v okolí čela trhliny, což má za následek spotřebu energie $w_f = \gamma_s + \gamma_p$. Dále lomová energie může být ovlivněna zakřívováním a větvením

trhliny, které vede opět ke zvětšení energie $w_f = \gamma_s \left(\frac{\text{skutečná plocha}}{\text{plocha v průmětu}} \right)$.

Tedy můžeme zobecnit Griffithův vztah tak, že do něj zahrneme jakýkoliv typ pohlcování (disipace) energie



$$\sigma_f = \left(\frac{2 \cdot E \cdot w_f}{\pi \cdot a} \right)^{1/2} \quad \text{rov. (9)}$$

1.4 Rychlost uvolňování energie (hnací síla trhliny).

V roce 1956 Irwin upravil Griffithův model tak, aby byl použitelný pro řešení technických problémů. Irwin definoval veličinu G jako „*rychlost uvolňování energie*“, která představuje energii potřebnou k velice malému (inkrementálnímu) přírůstku trhliny $G = -\frac{dW_{el}}{dA}$ (to je rovnice 7), slovo „rychlost“ použité v tomto případě neznamena derivaci dráhy na čase. G v tomto případě je chápána jako rychlost změny potenciální energie soustavy v závislosti na růstu lomové plochy. Protože G je získáno derivací energie, pak má význam síly a skutečně se tato veličina jmenuje **hnací síla trhlina** (crack driving force)

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} \cdot \left[\frac{(MPa)^2}{MPa} m = \frac{MJ}{m^2} = \frac{MN}{m} \right]$$

Druhá strana rovnice (7) vyjadřuje podmínku, kdy nastane šíření trhliny, tj. při jisté kritické hodnotě

$$G_C = \frac{dW_s}{dA} = 2 \cdot w_f = R \Rightarrow \text{toto by měla být měřitelná veličina,}$$

označuje se G_C a říkáme jí **houževnatost materiálu**, nebo někdy, když závisí na délce trhliny, **odpor materiálu R** .

Tak dostáváme podobné kritérium jako v případě např. plastické deformace

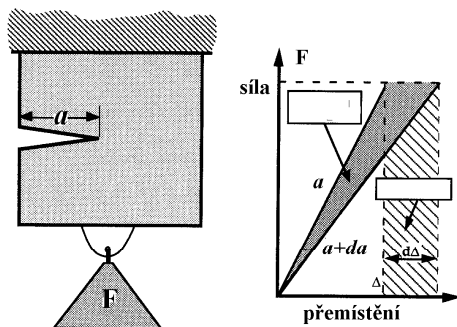
- k plastické deformaci při tahové zkoušce dojde, když platí $\sigma = R_p 0,2$,
- k lomu dojde, když platí $G = G_C$.

◀ Obr. 6 ▶ Obr. 7

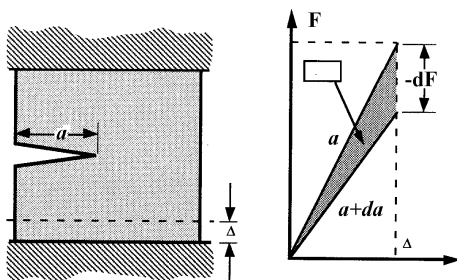
Chceme-li měřit houževnatost materiálu, musíme dokázat, že tato veličina nezávisí na podmínkách zatěžování. Víme, že při zatěžování mohou nastat dva extrémní případy - měkké zatěžování (síla F = konstanta, Obr.6) a tvrdé zatěžování (přemístění Δ = konstanta, Obr.7).

Celková energie systému $W = W_{el}$ (deformační energie uložená v tělese) – W_F (energie spojená s prací vnějších sil), zaveďme následující veličiny, síla F , přemístění síly Δ , délka trhliny a ,

$$\text{poddajnost } C = \frac{\Delta}{F}, \quad W_{el} = \int_0^{\Delta} F d\Delta = \frac{1}{2} F \Delta, \quad W_F = F \cdot \Delta,$$



zatížení konstantní silou, měkké zatížení



zatížení při konstantním přemístění, tvrdé zatížení

$$\frac{dW}{dA} = \frac{1}{B} \left(\frac{dW}{da} \right)$$

měkké zatěžování, $F = \text{konst.}$, $W = W_{el} - W_F$

$$G = -\frac{1}{B} \frac{dW}{da} = \frac{1}{B} \frac{d}{da} (W_F - W_{el}) = \frac{1}{B} \frac{d}{da} \left(F^2 C - \frac{1}{2} F^2 C \right) \Big|_{F=\text{konst}} = \frac{1}{B} \left[F^2 \frac{dC}{da} - \frac{1}{2} F^2 \frac{dC}{da} \right] \Big|_{F=\text{konst}} = \frac{1}{2B} F^2 \left(\frac{dC}{da} \right) \Big|_{F=\text{konst}}$$

tvrdé zatěžování, $W_F = 0$, $\Delta = \text{konstanta}$

$$G = \frac{1}{B} \frac{d}{da} (0 - W_{el}) = -\frac{1}{B} \left[\frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} F \Delta \right) \right] \Big|_{\Delta=\text{konst}} = -\frac{1}{B} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dF}{da} \right) \Delta \right] \Big|_{\Delta=\text{konst}} = -\frac{1}{2B} F^2 \left(\frac{dC}{da} \right) \Big|_{\Delta=\text{konst.}}$$

Pro měkké a tvrdé zatěžování je hnací síla trhliny stejná a tedy platí $\left(\frac{dW_{el}}{da} \right) \Big|_{F=\text{konst}} = - \left(\frac{dW_{el}}{da} \right) \Big|_{\Delta=\text{konst}}$

1.5 Vznik stabilního, nestabilního lomu – *R-křivka*

K iniciaci trhliny určitě dojde, jestliže $G = 2w_f$, ale následující růst trhliny může být:

- stabilní (trhlina se nešíří, pokud neroste zátěžná síla)
- nestabilní (trhlina se šíří samovolně, bez nutnosti dalšího zatěžování)

Který ze dvou případů nastane závisí na tom, jak se veličiny G a $2w_f$ mění v závislosti na délce trhliny a . Pro ilustraci podmínek stabilního a nestabilního růstu je vhodné nahradit veličinou $2w_f$ veličinou R = odpor materiálu vůči šíření trhliny. Závislost R na délce trhliny se nazývá **křivka odporu** nebo také ***R-křivka***.

Uvažujme širokou stěnu s průchozí trhlinou o velikosti $2a$. Při nominálním napětí σ je hnací síla trhliny

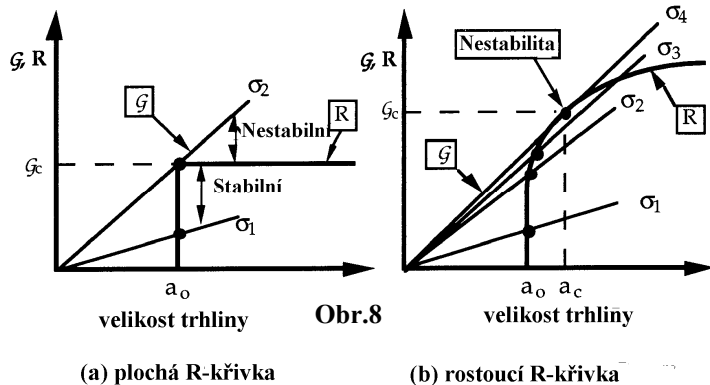
$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 a}{E} \Rightarrow \Rightarrow G \text{ závisí lineárně na } a \text{ v případě, že } \sigma \text{ je konstantní.}$$



Popis obrázku obr. 8a) $R \neq f(a)$. Lom nastane, když $G \equiv R$. Šíření lomu je nestabilní, protože hnací síla roste s rostoucí délkou trhliny a odpor R na délce trhliny nezávisí.

Popis obrázku obr. 8b) $R = f(a)$

Materiál s měnící se R -křivkou. σ_1 – trhlina neroste; σ_2 – trhlina se prodlouží o Δa a pak se zastaví $G < R$; σ_4 – hnací síla tvoří tečnu k R -křivce. Při postupném zatěžování trhlina bude stabilně růst až do napětí σ_{47} a pak se rozšíří nestabilně.



Podmínky pro

a) stabilní růst trhliny $G = R$ a

současně platí $\frac{dG}{da} < \frac{dR}{da}$

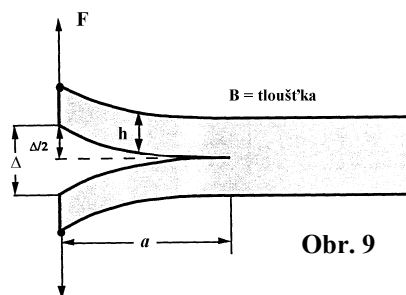
b) nestabilní růst trhliny $G = R$ a

současně platí $\frac{dG}{da} \geq \frac{dR}{da}$

V případě, že R -křivka je plochá ($R \neq f(a)$), pak G_C je jednoznačně definována; v případě, že R -křivka roste s a , G_C není jednoznačně definována. Z podmínky derivace plyne, že k nestabilnímu lomu dojde,

když křivka hnací síly G tvoří tečnu k R -křivce. To však nezáleží jen na tvaru R -křivky, ale i na závislosti hnací síly G na délce a , tato závislost se může měnit s konfigurací zatěžování.

Příklad jiné konfigurace (DCB, dvojkonzolový nosník, obr. 9)



Z teorie nosníku $\frac{\Delta}{2} = \frac{F \cdot a^3}{3EI}$, $I = \frac{Bh^3}{12}$, poddajnost $C = \frac{\Delta}{F} = \frac{2a^3}{3EI}$,

víme, že $G = \frac{F^2}{2B} \frac{dC}{da} = \frac{F^2}{2B} \frac{2 \cdot 3 \cdot a^2}{3EI} = \frac{12 \cdot F^2 \cdot a^2}{B^2 h^3 E}$, v případě takového tělesa $G \approx f(a^2)$

U materiálů s R -křivkou se zpravidla určuje hodnota G pro počátek (iniciaci) lomu. Tato iniciační hodnota zpravidla není citlivá na

(konfiguraci) tvar zatěžované součásti, ale jsou problémy s jejím měřením. Je obtížné určit okamžik iniciace trhliny a proto se používá „technická“ (smluvní) definice iniciace – analogicky jako při tahové zkoušce 0,2 % plastické deformace, tak zde se bere určitý přírůstek trhliny, zpravidla 0,2 mm a pro tuto hodnotu se určuje $G_{0,2}$. Další omezení je, že iniciační hodnota nedává informaci o tvaru R -křivky.

Příčiny různých tvarů R -křivky

R -křivka ideálně křehkých materiálů je plochá, protože povrchová energie γ_s je materiálová charakteristika, nezávisí na délce trhliny. V případě, že lom provází nelineární chování materiálu, pak R -křivka může růst. Tak je tomu např. v případě tvárného lomu.

Tvárný lom má za následek rostoucí R -křivku; důvod – plastická zóna na špičce trhliny se zvětšuje, když trhlina roste. Tedy, aby se udržel růst trhliny, musí G růst. Je-li součást dostatečně velká (plastická zóna $\ll$ rozměry tělesa), pak během zatěžování dosáhne plastická zóna ustálené velikosti a R -křivka se stane plochou.

R -křivka může klesat. V případě štěpného porušení u oceli – při pomalém zatěžování je štěpný lom iniciován v plastické zóně a trhlina se začne nestabilně šířit. Materiál blízko špičky trhliny je podroben vysoké rychlosti deformace, která zvyšuje odpor proti plastické deformaci a tedy w_f klesá $\Rightarrow$ odpor rychle rostoucí trhliny je menší než odpor při iniciaci trhliny.

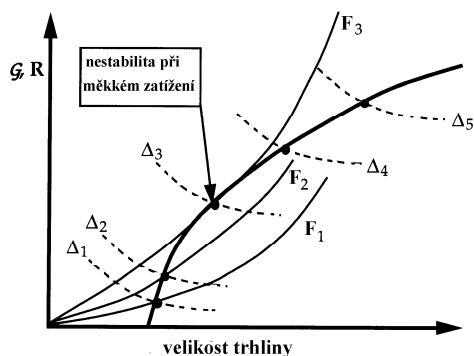
R -křivka a vliv geometrie součásti (Al – slitina desky)

Trhlina v tenké stěně má mnohem ostřejší vzestup R -křivky než v případě desky tlusté. Tenká stěna s trhlinou – převažuje rovinná napjatost; tlustá stěna s trhlinou – převažuje rovinná deformace.

R -křivka, stejně jako jiné charakteristiky zavedené lomovou mechanikou by měly být pouze materiálovou charakteristikou, to se v řadě případů daří.

Tvrdé a měkké zatěžování = vliv na růst trhliny.

V případě způsobu zatěžování lze říci, že tvrdé zatížení je mnohem stabilnější než zatížení měkké; hovoříme o tuhosti systému. Diskutujeme obrázek 10 na další straně.



⇐ rozbor Obr. 10

Příklad

Vyhodnoťte relativní stabilitu DCB tělesa v případě měkkého a tvrdého zatížení

Řešení

Pro DCB těleso platí $G = \frac{F^2 \cdot a^2}{B \cdot E \cdot I}$, pro měkké zatížení platí

$$\left(\frac{dG}{da} \right)_{F=\text{konst}} = \frac{2F^2 a}{B \cdot E \cdot I} = \frac{2G}{a}$$

Z teorie nosníku $F = \frac{3 \cdot \Delta \cdot E \cdot I}{2 \cdot a^3}$ dosadíme do výrazu pro

$$G = \frac{9 \Delta^2 E^2 I^2}{4 \cdot a^6} \cdot \frac{a^2}{B \cdot E \cdot I} = \frac{9 \Delta^2 E I}{4 B \cdot a^4} \text{ odtud pro tvrdé zatížení dostáváme } \left(\frac{dG}{da} \right)_{\Delta=\text{konst}} = - \left(\frac{9 \Delta^2 E I}{B \cdot a^5} \right) = - \frac{4G}{a}$$

Závěr neboli ponaučení

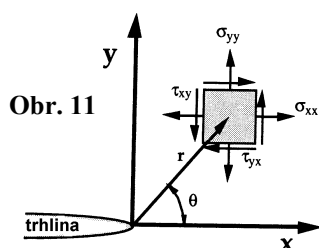
Hnací síla trhliny roste s rostoucí délkou trhliny v případě měkkého zatěžování a klesá s rostoucí trhlinou v případě tvrdého zatížení. Pro plochou R-křivku

Měkké zatížení – nestabilní lom

Tvrdé zatížení – stabilní lom, skutečnost je někde mezi.

2. Napětíová analýza okolí trhliny.

Celá teorie kolem křehkého lomu navržená Griffithem a dále rozpracovaná je precizní, ale obtížně použitelná v konstruktérské praxi. Spočítat hnací sílu trhliny G pro trhlinu v zatížené součásti libovolného tvaru se nedařilo. Problém vyřešil Irwin, a to pomocí rozboru napjatosti na čele ostré trhliny.



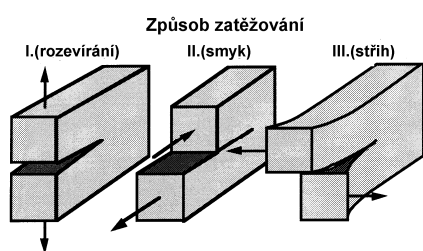
Obr. 11

Pro zatíženou součást s trhlinou je možné odvodit vztah popisující napjatost v tělese za předpokladu izotropního lineárně-elastického materiálu (v letech 1937 – 57 se objevuje řada publikací s tímto řešením). V případě, že použijeme polární souřadnicový systém s počátkem v místě čela trhliny – viz. **obr.11** – pak pole napětí ve stěně s trhlinou je dáno vztahem

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad \text{rov. (10)}$$

kde r a θ jsou polární souřadnice, σ_{ij} – složky tenzoru napětí, k – konstanta a $f_{ij}(\theta)$, $g_{ij}(\theta)$ jsou bezrozměrné veličiny, které jsou pouze funkcí úhlu θ .

⇒ všechna řešení obsahují první člen, který je úměrný $\frac{1}{\sqrt{r}}$; v případě, že r se blíží k nule, pak první člen



roste nade všechny meze, – tento člen vyjadřuje singularitu napětí v blízkosti čela trhliny. Další členy mají konečné hodnoty a závisí na geometrii tělesa. To tedy znamená, že v bezprostřední blízkosti trhliny rozhoduje o velikosti napětí pouze první člen.

2.1 Součinitel (faktor) intenzity napětí

⇐ Na obr.12 jsou znázorněny tři způsoby zatěžování trhliny. Konstanta k i funkce $f_{ij}(\theta)$ závisí na způsobu („módu“) zatěžování.

Existuje dohoda, že místo k se používá výraz $K = k\sqrt{2\pi}$ – a pro tuto veličinu se zavedl termín součinitel (někdy faktor) intenzity napětí a přidávají se jako index čísla označující způsob zatěžování. Nejčastěji se používají římské číslice, ale některé normy např. ISO používají čísla arabská K_I , K_{II} , K_{III} nebo také K_1 , K_2 , K_3 .

Napětíové pole před čelem trhliny v isotropním, lineárně-elastickém materiálu můžeme psát ve tvaru

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta)$$

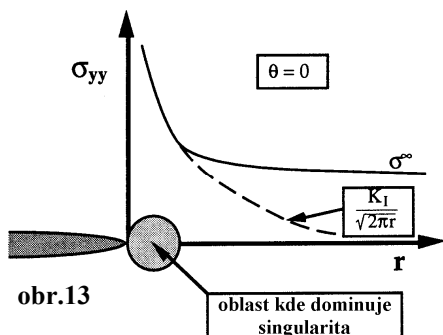
$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) \quad \text{konkrétní výrazy pro složky napětí i posunutí jsou v každých skriptech kde se hovoří}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{III} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) \quad \text{o lomové mechanice, příp. v tab.1 (rov. 11)}$$



Uvažujme způsob zatěžování I a to v rovině trhliny $\theta = 0$. Podle tab. 1 jsou napětí ve směrech x a y rovna

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{rov. (12)}$$



To znamená, že rovina trhliny je hlavní rovina pro způsob zatěžování I. Na dalším obr. 13 je schematicky vynesena průběh napětí σ_{yy} – napětí kolmého na rovinu trhliny. Rovnice 12 platí pouze v blízkosti čela trhliny, kde převládá singularita $1/\sqrt{r}$.

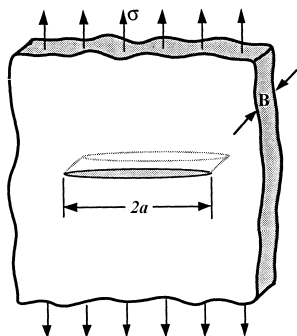
Napětí dále od špičky trhliny je dáno vzdálenými okrajovými podmínkami. Např. tahové napětí daleko od špičky trhliny bude rovno napětí σ^∞ .

ZÁVĚR

Oblast kde převládá singularita $\equiv$ oblasti, kde platí rovnicí (11) popsané pole napětí. Faktor intenzity napětí určuje amplitudu průběhu napětí v okolí čela trhliny. To znamená, že hodnota

K zcela definuje podmínky u čela trhliny. Jestliže známe hodnotu K , je možné vypočítat všechny složky napětí a posunutí jako funkci θ a r . Popis stavu napjatosti v okolí čela trhliny pomocí jediného parametru (K) je základem lomové mechaniky.

2.2 Vztah mezi K a globálními vlastnostmi součástí.



Vyjádření hodnoty K , které závisí na působící síle a geometrii součástí se postupně hledalo. V případě jednoduchého tvaru tělesa se K odvozuje, složitější geometrie vyžadují experimentální příp. numerické postupy určení.

Na obr. 14 je základní konfigurace – průchozí trhlina v nekonečné stěně zatížené napětím σ . Napětí je kolmé na rovinu trhliny – způsob zatěžování I. Protože zatížení je lineárně elastické $\Rightarrow$ napětí ve všech místech rostou úměrně k aplikovanému napětí σ . Tedy i v bezprostředním okolí čela trhliny napětí musí být úměrné σ a tedy $K_I \approx \sigma$. Podle rovnice 11

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) \quad \text{faktor } K_I \text{ musí mít rozměr } \text{napětí} \cdot \sqrt{\text{délka}} \Rightarrow$$

$$\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}, \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, \text{MN} \cdot \text{m}^{-3/2}, \text{někdy se používá jednotka } \text{N} \cdot \text{mm}^{-3/2},$$

budeme si pamatovat, že ($1 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2} = 31,6 \text{N} \cdot \text{mm}^{-3/2}$).

rozměr faktoru intenzity napětí, který se nesmí používat, je $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}$ a stejně tak se nesmí říkat faktoru intenzity napětí „ká i“, ale „ká jedna“

Jak vidíme na obr. 14 jedinou významnou délkou je velikost trhliny $a \Rightarrow$ mezi K_I a globálními podmínkami platí vztah $K_I = Y(\sigma\sqrt{a})$, konkrétní vztah pro

$$\text{geometrii na obr. 14 je } K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{rov. (13)}$$

amplituda singularity na čele trhliny je úměrná napětí a druhé odmocnině délky trhliny a to je součinitel intenzity napětí.

Velice podobné řešení dostaneme pro polonekonečnou stěnu.

Součinitel intenzity napětí pro konfiguraci na obr. 15 je

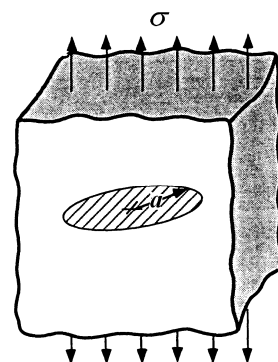
$$K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{rov. (14)}$$

Hodnota K_I v případě povrchové trhliny je o 12 % vyšší $\Rightarrow$ povrchové trhliny jsou nebezpečnější ve srovnání s trhlínami vnitřními.

Poslední případ je, že trhlina není průchozí; např. penízkovitá trhlina (penny – shaped crack), součinitel intenzity napětí pro takovou konfiguraci je

$$K_I = \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{rov. (15)}$$

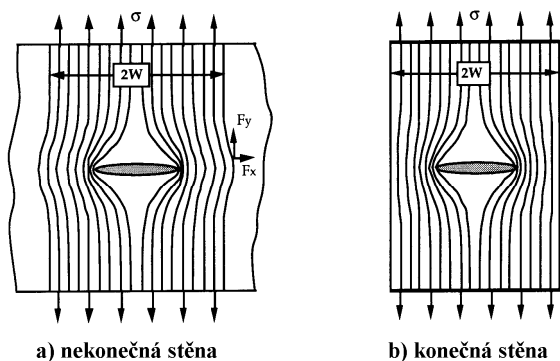
Obecné konfigurace poloeliptického povrchového defektu případně vnitřního eliptického defektu máme uvedeny v návodech ke cvičením.





Vliv konečné velikosti tělesa na K

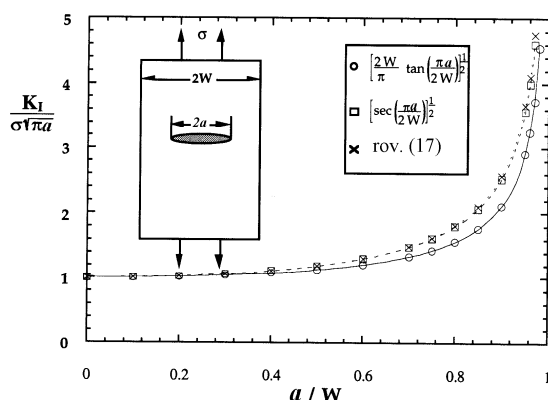
Doposud jsme mluvili o výrazech pro K_I , kdy trhlina je rovná, kruhová, eliptická a je vždy $\ll$ než rozměry tělesa (někdy se používá pojem nekonečná stěna). V případě, že trhlina roste, nebo okraje stěny se zmenšují, pak hranice tělesa ovlivňují napjatost na čele trhliny. V těchto případech řešení pro K_I v jednoduché formě není.



a) nekonečná stěna

b) konečná stěna

◀ **obr. 17** V nekonečné stěně siločáry ve vzdálenosti W od trhliny mají složky sil jak ve směru F_y , tak i F_x . V případě, že je šířka omezena rozměrem $2W$, pak síla ve směru x na volném povrchu musí být rovna nule. Tato okrajová podmínka vede k tomu, že siločáry musí být více stlačené na špičce trhliny a tedy je zde větší koncentrace napětí. Jednou z technik řešení okrajových podmínek je model řady trhlínek ležících v nekonečné stěně. Řešení má tvar

◀ **Obr. 18**

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\frac{2W}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right]^{1/2} \quad \text{rov. (16)}$$

Přesnější řešení vede na tvar

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[\sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right]^{1/2} \left[1 - 0,025 \left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0,06 \left(\frac{a}{W}\right)^4 \right] \quad \text{rov. (17)}$$

Na obr.18 je srovnání průběhů různých korekcí okrajových podmínek pro stěnu s centrální trhlinou.

K obecným výpočtům existují atlasy faktorů intenzity napětí pro nejrůznější tvary součástí.

V návodech ke cvičením máme uvedeny výrazy pro výpočet faktoru intenzity napětí pro pět různých

zkušebních těles. Obecně má rovnice pro výpočet K_I tvar

$$K_I = \frac{F}{B \sqrt{W}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad \text{rov. (18)}$$

kde B – tloušťka tělesa, W – rozměr tělesa v tom směru, kam se šíří lom (šíří trhlina), a – délka trhliny.

Ponaučení pro další výklad:

Pro tělesa konečných rozměrů je faktor intenzity napětí K_I pro průchozí trhlinu vždy vyjádřen vztahem

$$K_{I,II,III} = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot Y\left(\frac{a}{W}\right), \quad \text{rov. (19)}$$

kde σ – charakteristické napětí, a – charakteristický rozměr trhliny, $Y\left(\frac{a}{W}\right)$ – bezrozměrný člen, který závisí na tvaru součásti a způsobu zatěžování $\Rightarrow$ tvarový faktor (měrný faktor) intenzity napětí.

Vztah mezi faktorem intenzity napětí K_I a hnací silou trhliny G

K_I – kvantifikuje napětí a posunutí v blízkosti čela trhliny $\Rightarrow$ popisuje lokální (místní) vlastnost

G – kvantifikuje změnu energie napjatosti při malém přírůstku trhliny $\Rightarrow$ popisuje globální (celkovou) vlastnost

Pro lineárně elastický materiál jsou parametry zcela zaměnitelné, jsou ve zcela jednoznačném vztahu. Pro průchozí trhlinu v nekonečné stěně zatížené rovnoměrně tahovým napětím platí

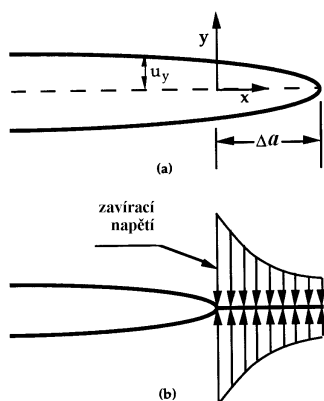
$$\boxed{G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}} \quad \rightarrow \quad \boxed{G = \frac{K_I^2}{E'}} \quad \leftarrow \quad \boxed{K_I = \sigma \sqrt{\pi a}} \quad \text{rov. (20)}$$

Kde (RD): $E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$

(RN): $E' = E$



Rovnice (20) platí pouze pro průchozí trhlinu v nekonečné stěně a bylo nutné dokázat, že tento vztah platí obecně – pro obecnou konfiguraci.



Uvažujme trhlínu o počáteční délce $a + \Delta a$ podrobenou zatížení, jak je ukázáno na **obr. 19a**. Nyní přiložíme tlakové napětí v rozmezí $x = 0$ až $x = \Delta a$ tak, že dojde k zavření trhliny. Práce nutná k uzavření konce trhliny je ve vztahu k hnací síle trhliny $G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)$, rov. (21)

kde ΔU je práce nutná k uzavření trhliny a tato práce je rovna součtu prací vykonaných v rozmezí od $x = 0$ do $x = \Delta a$

$$\Delta U = \int_{x=0}^{x=\Delta a} dU(x), \quad \text{rov. (22)}$$

což je plocha pod křivkou síla - přemístění

$$dU(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} F_y(x) \cdot u_y(x) = \sigma_{yy}(x) u_y(x) dx.$$

Hodnoty $\sigma_{yy}(x)$ a $u_y(x)$ vezmeme z tabulky 1 pro napětí přemístění pro

$$\theta = 0, \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}}, \quad u_y = \frac{2(1-\mu)}{G} K_I \left(\frac{x}{2\pi} \right)^{1/2} \quad \text{a dosadíme do rovnice (21)} \quad G = \frac{1-\mu}{2G} K_I^2 = \frac{1-\mu^2}{E} K_I^2 \quad (\text{pro}$$

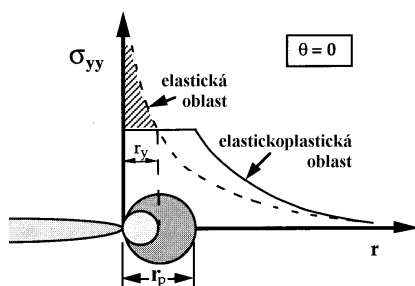
odlišení je zde symbol G použitý pro modul pružnosti ve smyku).

Tento vztah poprvé odvodil Irwin a tak dokázal, že existuje jednoznačná souvislost mezi veličinami K a G .

2.4 Vliv plastické deformace na napjatost na čele trhliny

Rovnice 11 ukazuje, že elastická napětí v místech kde $r \rightarrow 0$ mohou být velmi vysoká. Kovy, plasty – nejsou schopny přenést tak vysoká napětí a v okolí čela trhliny dochází k relaxaci napětí (vzniká zde plastická zóna). Nejprve uvažujeme podmínky RN (pouze dvě napětí), v rovině trhliny $\theta = 0$ je průběh napětí σ_{yy} dán rov. (12),

předpokládáme, že ke vzniku plastické deformace dojde v okolí čela až do místa, kde napětí $\sigma_{yy} = R_e = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_y}}$



odtud poloměr plastické zóny je dán vztahem $r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2$

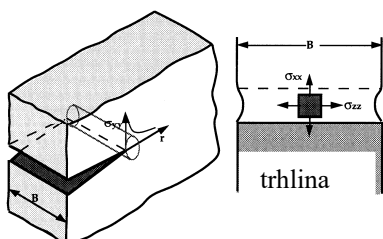
rov.(23a)

Jednoduchý výpočet v předcházejícím odstavci není zcela v pořádku, protože je založen pouze na elastickém řešení. V případě, že dojde k deformaci, musí dojít k přerozdělení napětí tak, aby byly splněny podmínky rovnováhy. Vyšrafovaná oblast **ve obr. 20** představuje průběh sil přítomných v ideálně elastickém materiálu, ale nemohou být přenášeny elastickoplastickým materiálem, protože v něm nemůže napětí přesáhnout mez kluzu. Tedy plastická zóna musí vzrůst na velikost, při které jsou tyto síly

vyrovnány. Jednoduchý způsob odhadu plastické zóny r_p je následující $R_e \cdot r_p = \int_0^{r_y} \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) dr$, po integraci,

dostáváme $r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2$, tato hodnota je dvakrát větší než při prvním odhadu. V případě podmínek rovinné

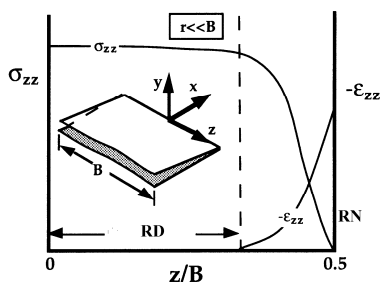
deformace, plastická deformace je potlačena trojosým stavem napjatosti a tedy rozměr plastické zóny je menší, a to asi třikrát



$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2 \quad \text{rov. (23b)}$$

Podmínky rovinné napjatosti, rovinné deformace.

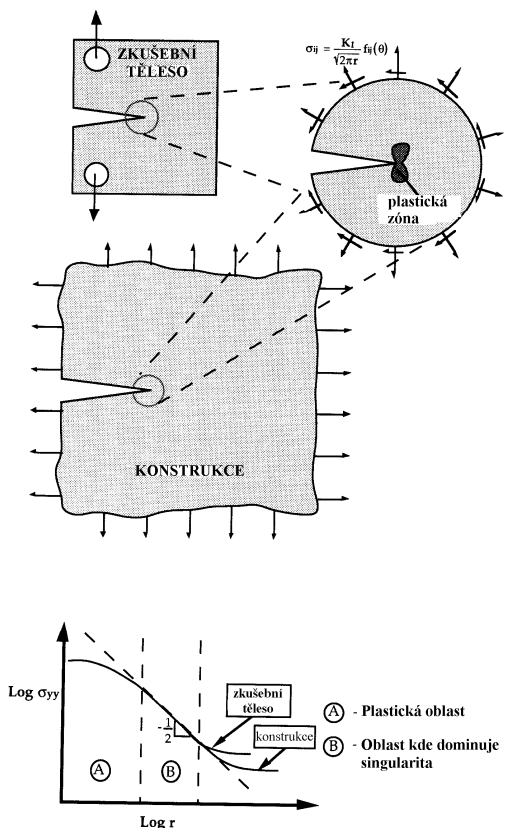
Obecně se dá říci, že podmínky v okolí čela trhliny nejsou ani RN ani RD, ale jsou trojrozměrné – při výpočtech se používá představa dvojrozměrná. Protože v okolí trhliny působí napětí větší než $\sigma \sim \sigma_{yy}$ materiál se snaží kontrahovat ve směru x a z (**obr. 21**), ale v tom mu brání okolní materiál. Proto uvnitř vzniká trojosá napjatost. V případě r_y



$\ll B$, pak uvnitř materiálu je RD – rovinná deformace. Materiál na povrchu desky může relaxovat ve směru z a tedy nemůže zde působit napětí kolmé k povrchu – stav RN- rovinné napjatosti.

← obr. 22

2.5 K_I jako parametr určující lom. Vliv rozměrů tělesa. Omezení LELM.



Ukázali jsme si, co je faktor intenzity napětí. Vydefinovali oblast, kde dominuje singularita. Víme, že K lze určit pro libovolný tvar defektu, rozměr tělesa a nominální napětí σ . Dále víme, že K je v jednoznačném vztahu k G . Naše úvahy nezahrnují plastickou zónu, příp. jiné projevy plastické deformace – nelineární závislost $\sigma \approx \epsilon$.

← obr. 23

Jak ze zkušební vzorku, tak i z konstrukce vybereme disk, v jehož středu je kořen trhliny (defektu). Velikost plastické zóny a rozdělení napětí uvnitř disku jsou pouze funkcí okrajových podmínek a materiálu. Přestože neznáme skutečné rozdělení napětí v plastické zóně, víme, že toto rozdělení je dáno okrajovými podmínkami. Okrajové podmínky plastické zóny A tvoří oblast B , kde dominuje singularita, která je dána hodnotou K_I . To znamená, jsou-li konstrukce a zkušební těleso zatíženy stejnou hodnotou K_I , pak jsou podmínky na čele trhliny u obou konfigurací stejné.

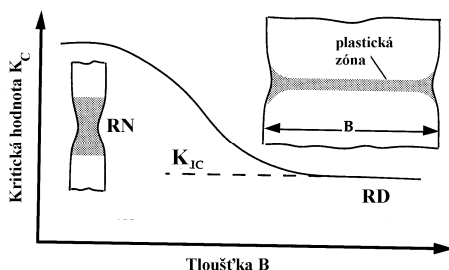
Roste-li zatížení, pak dojde k lomu při určité hodnotě K_C stejně jak u zkušební těleso, tak i u konstrukce – toto platí pouze za předpokladu malé plastické zóny, kdy bude existovat oblast B .

Podobná úvaha platí i pro případ, že těleso i konstrukce jsou zatěžovány cyklicky tak, že v obou případech je stejné ΔK_I (rozkmít faktoru intenzity napětí), pak bude stejná rychlost šíření únavové

trhliny. Opět však musí platit – malá plastická zóna obklopená oblastí, kde dominuje singularita $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Pro oba

případy zatěžování – rovnoměrně vzrůstající i cyklické – v okamžiku lomu platí $K_I \equiv K_C$, hodnota K_C je materiálová charakteristika vyjadřující houževnatost materiálu, užíváme termín lomová houževnatost.

Vliv rozměrů zkušební tělesa



hodnotu K_C . Obecně se vžil označování

K_{IC} -lomová houževnatost určená za podmínek rovinné deformace při pomalém (kvazistatickém) zatěžování, K_C - kritická hodnota faktoru intenzity napětí v okamžiku lomu, při němž není splněna podmínka rovinné deformace.

Okamžik lomu vznikne dosažením hodnoty K_C . Pro zjištění této materiálové charakteristiky musíme zajistit její nezávislost na geometrii součásti, tj. velikosti plastické zóny.

← Obr. 24

Je-li plastická zóna r_y malá ve srovnání s tloušťkou B , pak na rozhraní mezi plastickou a elastickou deformací uprostřed tělesa jsou podmínky blízké RD (je zde triaxialita napětí). Je-li plastická zóna r_y srovnatelná s B , pak dochází k deformaci ve směru tloušťky RN. Nižší stupeň trojososti napětí vede k nárůstu houževnatosti – je zde vliv B na



Omezení platnosti Lineárně Elastické Lomové Mechaniky

Ve všech normách pro měření lomové houževnatosti je uváděno, že musí platit

$$a, B, (W - a) \geq 2,5 \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2 \quad \text{rov. (24)}$$

a je délka trhliny, B tloušťka zkušebního tělesa, $(W - a)$ je rozměr tělesa od konce trhliny k povrchu tělesa ve směru šíření trhliny.

Podle rovnice (23) víme $r_y^{RD} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2$ a tedy vypočteme, jaký je poměr poloměru plastické zóny k tloušťce

$$\text{tělesa v případě, že platí rov. (24)} \quad \frac{r_y}{B} = \frac{\frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2}{2,5 \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2} \cong \frac{1}{50}$$

Rovnice (24) byla získána experimentálně převážně na slitinách hliníku a částečně na ocelích a vyjadřuje podmínku lomu při RD. Je-li tato rovnice splněna, pak zjištěná hodnota je materiálovou charakteristikou K_{IC} .

Rovnice (24) však nemusí vymezovat platnost LEELM. Platnost LEELM je dána existencí oblasti obklopující plastickou zónu, kde je dominující singularita $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Např. zkoušky duralových plechů pro draky letadel, zde

$$a, (W - a) \geq 2,5 \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2, \text{ při zkoušce se musí použít skutečná tloušťka plechu.}$$



Tabulka 1a)

Napětíová pole před čelem trhliny pro Mód I a Mód II v lineárním elastickém a isotropním materiálu

	Mód I	Mód II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]$
σ_{zz}	0 (rovinná napjatost) $\mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (rovinná deformace)	0 (rovinná napjatost) $\mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ (rovinná deformace)
τ_{xz} τ_{yz}	0	0

Tab.1b)

Posunutí před čelem trhliny pro Mód I a Mód II v lineárním elastickém a isotropním materiálu

	Mód I	Mód II
u_x	$\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$	$-\frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$

G je modul pružnosti ve smyku, $\kappa = 3 - 4\mu$ (rovinná deformace), $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$

Tab. 1c)

Složky nenulových napětí a posunutí v Módu III v lineárním elastickém a isotropním materiálu

$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\tau_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$u_z = -\frac{K_{III}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
--	---	--